

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Fizik Bölümü
Dalgalar ve Optik Laboratuvarı

DENEY-3

RLC Devre Salınımları-Sönümlü Harmonik Hareket ve Rezonans Deney Föyü

Hazırlayanlar:

Arş. Gör. Mustafa HARBUTOĞLU
Prof. Dr. Hakan ÖZTÜRK

10/03/2025

1. Amaç

Bu deneyin amacı, bir LRC devresinde sönen salınımlar gözlenecek ve üstel azalma ve bir sinüsel sürücü gerilimine karşı frekans tepkisi incelenecek.

2. Kullanılan Malzemeler

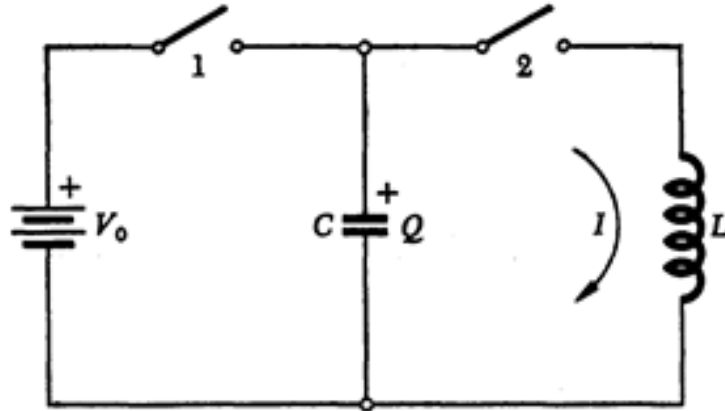
İki Dalganın Doğrusal Toplamı ve Vuru

- UQ3102CA Dijital Depolama Osiloskopu (1000MHz, 1G Sa/s)
- UQ1642 3MHz sinyal üretici (Fonksiyon Jeneratörü)
- 2 adet 10x veya 1x prob
- Bobin
- Direnç
- Kapasitör (Kondansatör)

3. Teorik Bilgi

Sönümlü Harket:

Bu deneyde, harmonik salınıcının elektrikteki benzeri olan elektrik devresini inceleyeceğiz. Temel düşünceleri tanıtmak için önce, Şekil 1'deki devreyi ele alalım.



Şekil 1

Önce anahtar 1'i kapatarak kondansatöre bir Q_0 ilk yükü verildiğini ve sonra anahtar 1'in açılıp $t = 0$ anında anahtar 2'nin kapatıldığını varsayalım. Böylece kondansatör, indüktör üzerinden boşalmaya başlar. Bununla beraber, RC devresinden farklı olarak indüktör uçları arasındaki gerilim $L(dI/dt)$ ile verildiğinden akım birden bire değişemez. Bunun yerine akımın değişim hızı, kondansatörde bir andaki gerilimin indüktörün uçları

arasındaki gerilim ile aynı olmasını gerektiren koşul ile belirlenir. Akımın yönü Şekil 1'deki gibi tanımlanırsa,

$$I = -\frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{Q}{C} = L\frac{dI}{dt} \quad (2)$$

bağıntısı elde edilir. Bunları birleştirerek,

$$-L\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

ifadesini buluruz. Bu denklemin şekli, kütlesi m ve kuvvet sabiti k olan bir harmonik salıncının Newton hareket denkleminin tamamen aynısıdır.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (4)$$

$\frac{1}{C}$ terimi, k yay kuvvet sabitinin ve L indüktansı ise mekanik sistemdeki m kütlesinin yerini alır. Başlangıçtaki yer değiştirmesi x_0 olan bir harmonik salıncının hareket denkleminin,

$$x = x_0 \cos(w_0 t) \quad (5)$$

ile verildiği bilinmektedir. Burada f Hertz veya saniyedeki dönüm sayısı olmak üzere $w_0 = 2\pi f$ 'ye eşittir ve kütle-yay sisteminde,

$$w_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

ile verilir. Bu benzetmelerden sonra tekrar kondansatör ve indüktör devresine dönülebilir. Kondansatördeki yükün zamanla değişiminin,

$$Q = Q_0 \cos(w_0 t) \quad (7)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Bu devrenin açısal frekansı,

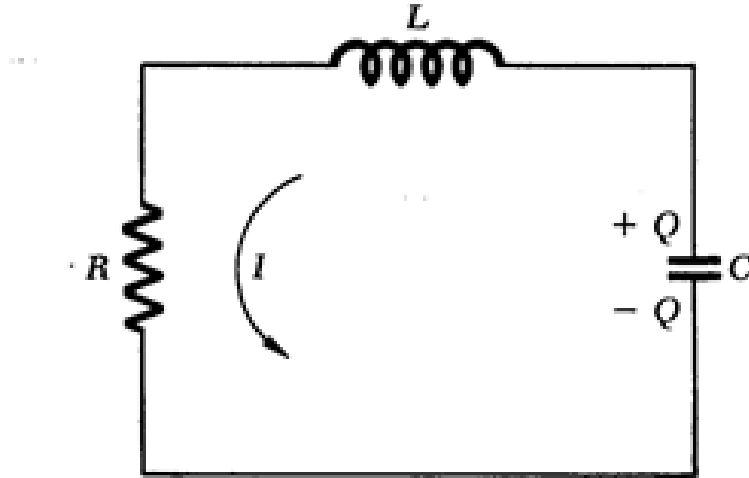
$$w_0 = \frac{1}{(LC)^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

ile verilir. Harmonik salıncıdaki enerji, hareket esnasında potansiyelden kinetiğe ve kinetikten potansiyele dönüşmektedir. Hem basit sarkaç hem de kütle-yay sisteminde yer değiştirmenin en çok ve hızın sıfır olduğu noktalarda toplam enerjinin tamamı potansiyeldir; yer değiştirmenin sıfır ve hızın en büyük olduğu noktalarda ise toplam

enerjinin tamamı kinetiktir. Benzer şekilde LC devresinde, kondansatör yükünün en çok (kondansatörün tam dolu olduğu an) ve akımın sıfır olduğu anlarda toplam enerjinin tamamı kondansatörde birikmiş olacaktır. Kondansatör boşalmaya başlayıp devreye akım verdiğinde ve dolayısıyla tamamen boşalıp kondansatördeki yükün sıfır, devredeki akımın ise en fazla olduğu anlarda toplam enerjinin tamamı indüktörün manyetik alanında toplanır. Böylece kondansatörün elektrik alan enerjisi, potansiyel enerjiye; indüktörün manyetik alan enerjisi de kinetik enerjiye benzer. Sönümlü harmonik salıncının elektrikteki benzeri, bir direnç, bir indüktör ve bir kondansatörden oluşan bir elektrik devresidir. Denklem (2) ve (3)'te verilen sistemler genelde ideal sistemlerdir. Yani, doğrusal bir geri çağırıcı kuvvetin etkisi altında sonsuza kadar titreşen sistemlerdir. Gerçek sistemlerde ise sürtünme kuvveti gibi harcamalı kuvvetler daima vardır ve bu kuvvetler sistemin hareketini zorlaştırır. Sonuçta, sistemin mekanik enerjisi zamanla azaldığından bu tür hareketlere “sönümlü” denir. Buna göre, Denklem (3)'de verilen kütle-yay sisteminin Newton denklemini, hız ile orantılı ve zıt yönlü olduğu düşünülen bir sönüm kuvvetinin eklenmesi gerekir. Bu sönüm kuvveti $-b\frac{dx}{dt}$ ile verilir ve burada b orantı sabitidir. Böylece sönümlü harmonik hareket yapan kütle-yay sisteminin diferansiyel denklemi,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (9)$$

şeklini alır.



Şekil 2

Şekil 2’de gösterilen LRC devresi de sönümlü harmonik harekete bir örnektir. Bu devreye Kirchhoff’un ilmek kuralı uygulanırsa,

$$\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} - IR = 0 \quad (10)$$

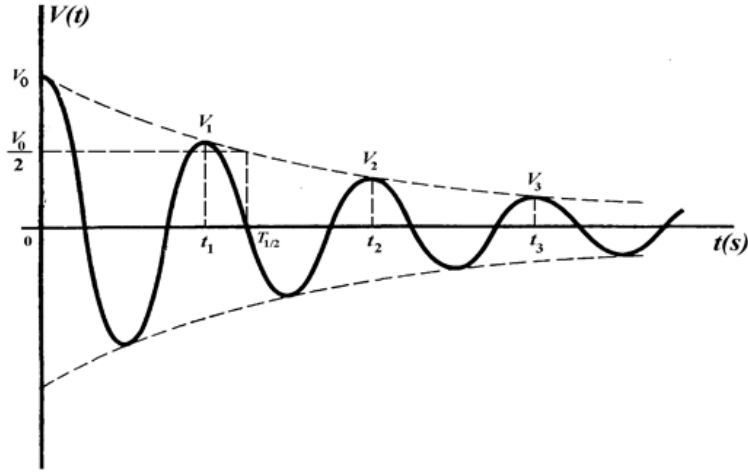
eşitliği bulunur. Burada, akımın $I = \frac{dQ}{dt}$ olduğu hatırlanırsa Denklem (9) Q cinsinden yeniden düzenlenebilir:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (11)$$

Bu denklem önceden ileri sürüldüğü gibi Denklem (8)'in biçimce tamamen aynıdır. Buna göre; L , m 'ye; R , k 'ya ve C direnci de b 'ye karşılık gelmektedir.

Sönümlü harmonik salıncı ile LRC devresi arasındaki benzerliğin başka bir yönü, iki sistemdeki enerji bağıntılarının göz önüne alınması ile ortaya çıkar. Daha önce gözlendiği gibi sönümsüz bir harmonik salıncının toplam mekanik enerjisi sabittir; sönüm kuvvetinin etkisi enerjiyi sürekli olarak azaltmaktadır. Sönümsüz bir harmonik salıncı gibi LC devresinin de toplam enerjisi sabittir; bu toplam enerji indüktör ile kondansatör üzerinde birikir, ancak elektrik enerjisi devreden çıkamaz. Sönümsüz harmonik hareket yapan LC devresine bir direncin eklenmesiyle direnç üzerinde $I^2 R$ kadarlık bir güç kaybı meydana gelir ve bu kayıp sistemin enerji kaybetmesine yol açar. Enerjinin dirençte ısıya dönüşmesi ile devredeki elektrik enerjisi sürekli olarak azalır.

LRC devresindeki yük ve akım, R 'nin küçük değerleri için sönümlü harmonik davranış gösterir. Bu durum sürtünmeli bir ortamda, bir kütle-yay sisteminin sönümlü harmonik hareketine benzer. Hiç kuşkusuz tam sönümsüz bir harmonik salıncının bulunması veya gerçekleştirilmesi olarak dışı ideal bir durumdur. Dirençsiz bir LC devresi düşünülemez. Devrede hiç direnç olmasa bile indüktör sargı telinin ve bağlama tellerinin direnci hiçbir zaman tamamen ihmal edilemez. Harmonik salıncılar üzerinde yapılan çalışmalar, sönüm kuvvetinden ileri gelen enerji kaybı ile birlikte salınımların genliğinde de düzgün bir azalma olduğunu göstermiştir. Salınımların genliğinde gözlenen bu azalmalar Şekil 3'ten incelenebilir.



Şekil 3

Harmonik hareket yaptığı daha yaygın olarak bilinen kütle-yay sistemindeki salınının periyodu, yani tam bir dalganın oluşması için geçen zaman,

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

ile verilir. Salınım genliği için gevşeme zamanı (genliğin ilk değerinin $\frac{1}{e}$ 'sine düşmesi için geçen zaman) ise,

$$\tau = \frac{2m}{b} \quad (13)$$

İle verilir. Dizgenin (dalga katarının) yarı ömrü ($T_{1/2}$), genliğin ilk değerinin yarısına düşmesi için geçen zamandır ve aşağıdaki gibi verilir:

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{(\ln 2)2m}{b} = \frac{1,386m}{b} \quad (14)$$

Sönümlü harmonik salımcı ve LRC devresi arasındaki benzerliklerden ve özellikle Denkem (8) ile (10) diferansiyel denklemlerinin şekilce özdeş olmalarından yararlanmak ve uygun simge değişiklikleri yapmak suretiyle bu tartışmanın tümü LRC devresine uygulanabilir. Bunun için m 'yi L ile, b 'yi R ile ve k 'yi $\frac{1}{C}$ ile değiştirmek yeterli olacaktır.

$$w_0 = \frac{1}{(LC)^{\frac{1}{2}}} \text{ ve } \tau = \frac{2L}{R} \quad (15)$$

Denklem (10)'un en genel çözümü,

$$Q = Q_0 e^{\frac{-t}{\tau}} \cos \left[\left(w_0^2 - \frac{1}{\tau^2} \right)^{\frac{1}{2}} t + \phi \right] \quad (16)$$

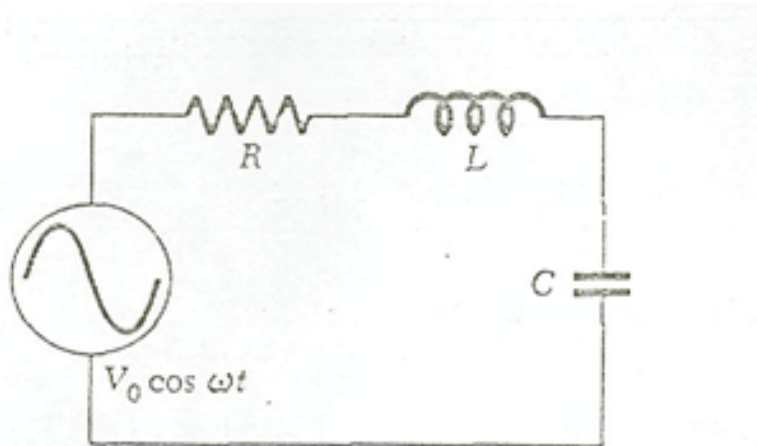
ile verilir.

Rezonans:

Bu deneyde LRC devresinin sinüsel sürücü bir gerilime verdiği tepki incelenecektir.

$$V = V_0 \cos (wt) \quad (17)$$

ile verilen sinüsel bir sürücü gerilim kaynağının olduğu Şekil A'deki devreyi göz önüne alalım. Burada açısal frekansı, devrenin $w_0 = \frac{1}{LC^{1/2}}$ belirtgen frekansına genellikle eşit değildir; fakat bu gerilimi oluşturan üreticinin belirtgenleri ile belirlenir.



Şekil 4

Şekil 4' deki devreye Kirchoff'un ilmek yasası uygulandığında, elde edilen diferansiyel denklem;

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos (wt) \quad (18)$$

dir. Kondansatörün Q yükünün zamanla değişimi, Denk. (18)'nin çözümü olan bir fonksiyon ile anlatılır. Çözümün, frekansı sürücü geriliminin frekansı ile aynı olan fakat aralarında bir faz farkı bulunan;

$$Q = Q_0 \cos (wt + \phi) \quad (19)$$

şeklinde bir sinüs fonksiyonu olduğu düşünölsün. Bu bağıntının çözüm olabilmesi için, Denk. (18)'yi sağlaması gerekir. Bunun için Denk. (19), birinci türevi, ikinci türevi ile Q_0 ve ϕ 'nin gerekli değerleri Denk. (18)'de yerine yazılır. $\sin (wt + \phi)$ ve $\cos (wt + \phi)$ fonksiyonları açılıp, terimler $\sin (wt)$ ve $\cos (wt)$ parantezlerine alınır. Bu işlemler yapıldığında;

$$-Q_0 w^2 L \cos (wt + \phi) - Q_0 w R \sin (wt + \phi) + \frac{Q_0}{C} \cos (wt + \phi) = V_0 \cos (wt) \quad (20)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenerek;

$$Q_0 \left[\left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right) (\cos (wt) \cos \phi - \sin (wt) \sin \phi) - \sin (wt) \sin \phi - wR (\sin (wt) \cos \phi + \cos (wt) \sin \phi) \right] = V_0 \quad (21)$$

elde edilir. Elde edilen denklemde eşitliğin her iki tarafındaki $\cos (wt)$ ve $\sin (wt)$ terimlerinin katsayıları sıra ile eşitlenerek

$$Q_0 \left[\left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right) \cos \phi - Rw \sin \phi \right] = V_0 \quad (22)$$

$$Q_0 \left[- \left(\frac{1}{C} - Lw^2 \right) \sin \phi - Rw \cos \phi \right] = 0 \quad (23)$$

bulunur. Denk. (23) yeniden düzenlenerek

$$\tan \phi = \frac{1}{wL - \frac{1}{wC}} \quad (24)$$

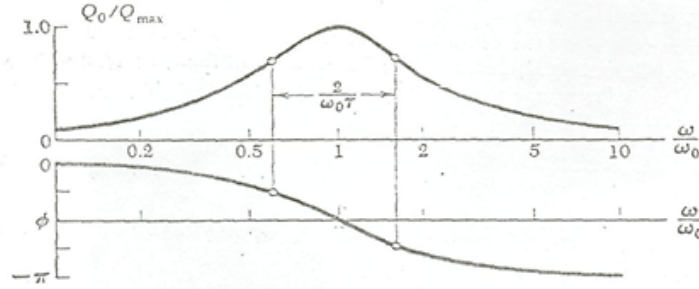
elde edilir. Denk.(6.6a), $\sin \phi$ ile bölünüp Denk. (24)'de yerine yazılırsa;

$$Q_0 = -\frac{V_0}{wR} \sin \phi \quad (25)$$

denklemleri elde edilir. Q_0 , içinde ϕ bulunmayacak şekilde yeniden yazılabilir.

$$Q_0 = \frac{\frac{V_0}{w}}{[R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2]^{1/2}} \quad (26)$$

Denk.(24) ile (26)'un önemi, Q_0 ve ϕ 'yi w sürücü gerilim frekansının fonksiyonu olarak veren Şekil 5'den görülebilir. Çok alçak frekanslarda, faz açısının sıfır ve Q yükünün sürücü gerilim ile aynı fazda olduğu görülür. Daha yüksek frekanslarda ise ϕ gittikçe eksi değerler alır ve çok yüksek frekans sınırında Q , V 'den yarım periyot ($\phi = -\pi$) geride kalır.



Şekil 5

Q_0 genliği, w ile değişir ve $wL - 1/wC$ 'nin sıfır olduğu ($\phi = -\pi/2$) durumunda;

$$(Q_0)_{max} = \frac{V_0}{wR} \quad (27)$$

maksimum değerine ulaşır. Bu durum $w = (1/LC)^{1/2}$ olduğu zaman gerçekleşir ve bu değer de devrenin w_0 sönümsüz frekans değeridir. Yani, sürücü frekansının doğal sönümsüz frekansa eşit olması halinde dizgenin tepkisi en büyüktür. Belli bir frekansta tepkinin “tepe değerine ulaşmasına” rezonans denir, buna benzer rezonans olayları fizikğin hemen hemen bütün dallarında görülür.

Q_0 'ı w 'ya bağlı olarak veren eğrinin tepesinin keskinliği ilginçtir; $wL - 1/wC = \pm R$ iken Q_0 'ın en büyük değerinin $1/\sqrt{2}$ 'sine düştüğünü ve $\phi = -\pi/4$ veya $\phi = -3\pi/4$ olduğunu Denk. (24) ve (26)'dan görürüz. Tepkinin maksimumunun $1/\sqrt{2}$ 'ye düşmesi için w ve w_0 'dan ne kadar farklı olmalıdır? Bu sorunun cevabını bulmak için w 'yı $w_0 + \Delta w$ olarak yazıp

$$(w_0 + \Delta w)L - \frac{1}{(w_0 + \Delta w)C} = \pm R \quad (28)$$

eşitliğini sağlayan Δw 'nin değeri bulunur. Bu denklemden Δw tam olarak çözülebilir. Sönümün, eğrinin tepesini oldukça keskin yapacak kadar küçük ve $\Delta w \ll w_0$ olduğunu düşünerek yapılan yaklaşım büyük bir kolaylık sağlar ve bu durumda;

$$\frac{1}{w_0 + \Delta w} \cong \frac{1}{w_0} - \frac{\Delta w}{w_0^2} \quad (29)$$

dır. BU sonucu $w_0 = (1/LC)^{1/2}$ ile birlikte Denk. (28)'de kullanarak;

$$\Delta w = \pm \frac{R}{2L} = \pm \frac{1}{\tau} \quad (30)$$

Bulunur. Denk.(30), R küçük olduğunda Δw 'nın da küçük olacağını ve tepki eğrisi tepesinin her iki yanında keskince düştüğünü gösterir. R 'nin daha büyük değerleri, daha yassı, daha geniş bir tepe verir. Tepki eğrisinin genişliğinin nitelik katsayısı ile doğrudan ilgili olduğunu da belirtebiliriz.

$$w_0 = (1/LC)^{1/2}, \tau = \frac{2L}{R} \text{ ve } QK = \frac{1}{R} \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2}$$

denklemleri birleştirilince;

$$QK = \frac{w_0}{2 \Delta w} \quad (31)$$

elde edilir. Denklem (31)'den görüldüğü gibi, devrenin sönüm belirtgenleri doğrudan onun frekans tepkisine bağlıdır. QK 'nın büyük olması sönümün küçük, gevşeme zamanının uzun ve tepki eğrisinin keskince dikleşmesi demektir. QK 'nın küçük olması ile bunların tersi olur. Devredeki I akımı Denk. (19)'ün zamana göre türevinden elde edilir ve fazı her zaman Q 'dan $\pi/2$ öndedir. Bunun için rezonans durumunda I , V ile aynı fazdadır ve R direnci üzerinden L bobini ile C sığası kısa devre yapılmış gibi akım geçer. Bu nedenle w_0 frekansı, R direncinde en çok güç harcamasına yol açan frekanstır. Dirençteki güç kaybının, $w = w_0 + \Delta w$ frekanslarında maksimum değerinin yarısı olduğu kolayca gösterilebilir. Bu frekanslara, yarı-güç noktaları da denir.

4. Deneyin Yapılışı

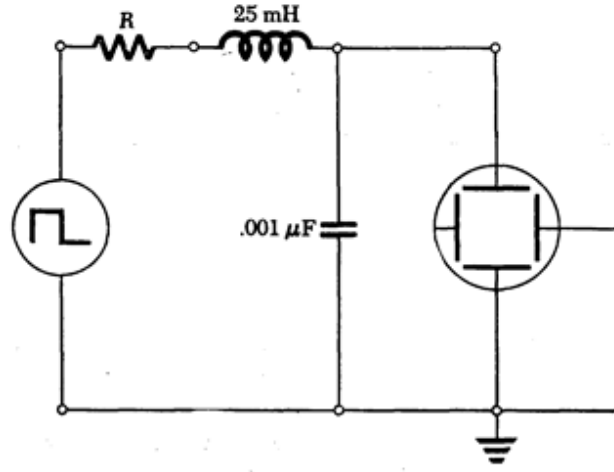
Sönümlü Hareket:

Bir LRC devresinde sönen salınımların gözlenmesi ve üstel azalmanın incelenmesi için Şekil 6'deki devreyi kurunuz. Burada kare-dalga üretici, periyotlu olarak açılıp kapanan bir üreteç işlevini görmektedir. Osiloskop, kondansatörün uçları arasındaki gerilimin zamanla değişimini gözlemek ve ölçmek için kullanılmaktadır. Buna göre, sönen salınımların dalga şeklini osiloskopta gözleyin ve Şekil 3'e benzeyen şekli grafik kağıdına aktarınız. Bu şekil üzerinde $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots$ genliklerini ve bunlara karşılık gelen $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$ sürelerini ölçünüz. Daha sonra, genliğin ilk değerinin yarısına düştüğü değer olan $T_{1/2}$ yarı ömrünü grafik üzerinde işaretleyiniz. Grafikten sönen salınımların frekansını ve yarı-ömrünü ölçünüz; bu ölçtüğünüz frekans ve yarı-ömür değerlerini, $T_{1/2} = \tau \ln 2$ ve $\omega_0 = 2\pi/T$ ifadelerinde kullanarak ω_0 ile τ 'yu hesaplayınız. Daha sonra kurduğunuz devrede kullandığımız bobinin indüktans ve direnç değerlerini Tablo 1'den alıp Denklem (14)'de

yerine yazarak bulacağınız teorik w_0 ve τ 'yu deneysel sonuçlarınızla karşılaştırınız. Ayrıca, genliğin zamanla değişimini veren,

$$V(t) = V_0 e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (32)$$

ifadesi kullanılarak da devrenin zaman sabiti bulunabilir. Bunun için, $\ln(\frac{V}{V_0})$ 'ın t 'ye karşı grafiğini çizip, eğimden τ zaman sabitini bulunuz ve öncekilerle karşılaştırınız. Burada bir doğru denklemi elde etmek ve grafiği ona göre çizip, doğrunun eğimini kullanmak iyi bir yoldur.



Şekil 6

Bu devredeki R direnci, deneyde kullanılan kare-dalga üretici, ölçüm cihazları ve devre elemanlarının direncini göstermektedir.

Sarım Sayısı	300	600	1200	3600	12000
DC Direnç (ohm)	1,05	2,46	15,3	152,0	1320,0
İndüktans (Henry)	0,0027	0,013	0,049	0,45	4,40

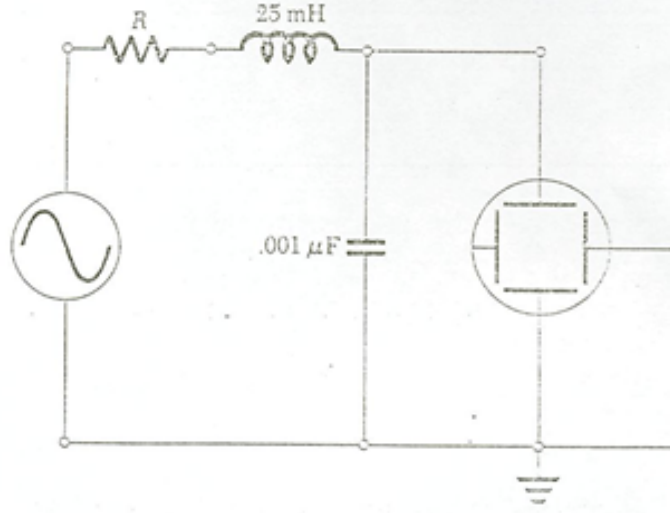
Table 1: Sistem özellikleri

Bu indüktans değerleri bobinlerin (indüktörlerin) ortası boş iken geçerlidir. Bobinlerin ortasında demir veya başka maddeler olması durumunda bu değerler değişebilmektedir.

Rezonans

Frekans Tepkisi

Bir sinüsel sürücü gerilimine karşı frekansın tepkisini incelemek için Şekil 7'deki devreyi kurunuz. Sinüs dalga üreticinin frekansını küçük bir değerden büyük bir değere doğru değiştiriniz ve genliğin nasıl değiştiğini gözleyiniz.



Şekil 7

5. Sorular

Sönümlü Hareket

1. Dirençsiz bir LC devresinde kondansatör yükünün en çok olduğu durumda akımın sıfır olduğunu ve bunun tersinin de doğru olabileceğini gösteriniz.
2. Buradaki sönümü ortadan kaldıracak için neler yapılabilir, pratikte sönümsüz bir devre elde etmek mümkün müdür, açıklayınız; mümkün değilse nedenini belirtiniz?

Rezonans

1. Denk. (26)'un w 'ya göre türevini alıp sıfıra eşitleyerek, Q_0 'ın en büyük değerini yalnız R 'nin küçük olması halinde tam w_0 'da olduğunu ve daha büyük R değeri için rezonans tepesinin biraz daha küçük bir frekansta meydana geldiğini gösteriniz. Eğer R yeterince büyük ise, eğrinin tepesinin hiç olmayacağını ve w 'nin sürekli olarak düşen bir fonksiyonu olacağını gösteriniz. R 'nin kritik değerini ve buna karşılık gelen QK 'yı bulunuz. İpucu: Denk. (26)'u yalnızca w^2 bulunacak şekilde düzenleyip w^2 yerine tek bir simge kullanarak (buna y diyelim) ve $\frac{1}{Q^2}$ niceliğinin y 'ye göre diferansiyelini alarak yapılan hesap basitleştirilebilir.
2. Sinüsel sürücü gerilim halinde C 'deki gerilim ile L 'deki gerilim arasındaki faz bağıntısı nedir?
3. Rezonans frekansında L ile C 'deki gerilimlerin büyüklükçe eşit olduğunu ve aralarında yarım dönemlik bir faz farkı bulunduğunu, böylece L ile C 'deki toplam potansiyel farkının sıfır olduğunu gösteriniz.

4. Rezonans frekansı **a)** 10^{-2} Hz **b)** 10^{10} Hz olan bir LC devresinin düzenlenmesinde ne gibi sorunlarla karşılaşılır?
5. Kondansatördeki gerilimin V_c rezonans genliğinin sürücü gerilimin V_0 genliğinden çok daha büyük olabileceğini ve bunun $V_c = (QK)V_0$ ile verildiğini gösteriniz.