

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi  
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi  
Fizik Bölümü  
Dalgalar ve Optik Laboratuvarı

## DENEY-2

### Dalga Süperpozisyonu: Vuru ve Lissajous Eğrileri Deney Föyü

**Hazırlayanlar:**

Arş. Gör. Mustafa HARBUTOĞLU  
Prof. Dr. Hakan ÖZTÜRK

03/03/2025

# 1. Amaç

Bu deneyin amacı, iki dalganın süperpozisyonu incelenerek vuru olayı ve Lissajous eğrileri oluşturulmasıdır. Aynı veya farklı frekanstaki dalgaların doğrusal toplamı gözlemlenerek girişim desenleri analiz edilecek ve Lissajous eğrilerinin; dalgaların frekans ve faz farklarına bağlı olarak nasıl değiştiği incelenecektir. Buna ek olarak, deney sonucunda dalga süperpozisyonunun temel ilke kavramaları, vuru olayı ve Lissajous eğrilerinin fiziksel anlamı keşfedilecektir.

## 2. Kullanılan Malzemeler

### İki Dalganın Doğrusal Toplamı ve Vuru

- UQ3102CA Dijital Depolama Osiloskopu (1000MHz, 1G Sa/s)
- 2 adet UQ1642 3MHz sinyal üretici (Fonksiyon Jeneratörü)
- 2 adet 10x veya 1x prob

### Eş veya Farklı Frekanslı Dalgalar İçin Lissajous Eğrileri

- UQ3102CA Dijital Depolama Osiloskopu (1000MHz, 1G Sa/s)
- 2 adet UQ1642 3MHz sinyal üretici (Fonksiyon Jeneratörü)
- 2 adet 10x veya 1x prob

## 3. Teorik Bilgi

### 1. Aşama için

Üst üste binme ilkesi, değişikliğe uğrayan ortamın herhangi bir kısmının gerçek ötelemesinin, her bir dalga tarafından meydana getirilen yer değiştirmelerin vektörel toplamına eşit olduğunu ifade eder. Deneyin bu aşamasında; harmonik dalgalar kullanılarak üst üste binme ilkesi incelenecektir. Verilen bir ortamda birleşebilen harmonik dalgalar, eş frekans ve dalga boyuna sahiplerse: Kararlı (duragan) dalga denilen sabit bir desen oluştururlar. Eğer frekansları çok az farka sahip iki dalga girişime uğrarsa vuru olayı meydana gelir. Vuru frekansı, yapıcı ve yıkıcı girişim arasındaki değişim hızına karşılık gelir.

### Harmonik Dalgaların Üst-Üste Binmesi ve Girişim:

Üst-üste binme ilkesi, iki ya da daha fazla dalganın aynı çizgisel ortamda ilerlerken, o ortamda herhangi bir noktadaki toplam yer değiştirmenin (bileşke dalga) tüm dalgaların yer değiştirmelerinin cebirsel toplamına eşit olduğunu ifade eder. Bu prensibi, aynı yönde yayılan iki harmonik dalgaya uygulayalım. İki dalga aynı frekansa, aynı dalga boyuna,

aynı genliğe sahip fakat sadece fazları farklı ise sağa doğru yayılan bu dalgaların her birini Denklem (1) ve Denklem (2) olarak tanımlayabiliriz.

$$y_1 = A_0 \sin(kx - wt) \quad (1)$$

$$y_2 = A_0 \sin(kx - wt - \phi) \quad (2)$$

Böylece dalga fonksiyonu;

$$y = y_1 + y_2 = A_0[\sin(kx - wt) + \sin(kx - wt - \phi)] \quad (3)$$

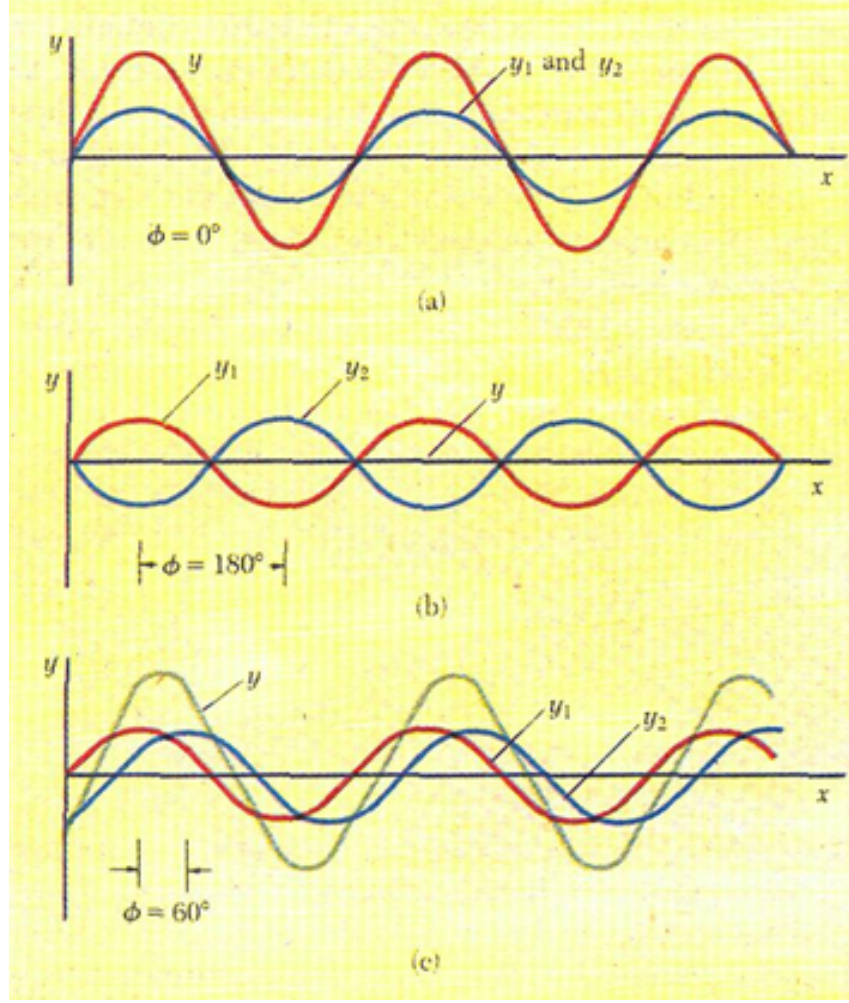
Bağıntısı ile temsil edilir. Bu ifadeyi basitleştirmek için temel trigonometrik özdeşlikler kullanılabilir:

$$\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (4)$$

Burada;  $a = kx - wt$  ve  $b = kx - wt - \phi$  alınır, y-Bileşke dalga fonksiyonu Denklem (5) ile temsil edilir.

$$y = 2A_0 \cos \frac{\phi}{2} \sin(kx - wt - \phi) \quad (5)$$

Bu sonucun önemli birkaç özelliği vardır. y-Bileşke dalga fonksiyonu  $y_1$  ve  $y_2$  dalgaları ile eş frekanslı ve aynı dalga boyuna sahip olup harmoniktir. Bileşke dalga fonksiyonunun dalga genliği;  $2A_0 \cos \frac{\phi}{2}$  ve faz sabiti  $\frac{\phi}{2}$ 'ye eşittir.  $\phi$ , faz sabiti sıfıra eşitse buradan;  $\cos \frac{\phi}{2} = \cos 0 = 1$  ve bileşke dalganın genliği  $2A_0$  olur. Diğer bir deyişle bileşke dalganın genliği, her yerde yapıcı olarak girişim yaptığı söylenir. Yani her dalganın tepe ve çukurları (Bkz. Şekil 1.a) aynı konumda bulunur. Genellikle, yapıcı girişim  $\cos \frac{\phi}{2} = \pm 1$  veya  $\phi = 0, 2\pi, 4\pi \dots$  olduğu zaman oluşur. Diğer yandan  $\phi, \pi$  radyana (veya  $\pi$ 'nin tek katlarına) eşit olursa  $\cos \frac{\phi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  olur ve bileşke dalga her yerde 0 (sıfır) genliğe sahip olur. Bu durumda bulunan iki dalga sönümlenerek girişim yapar. Yani bir dalga tepesi diğerinin çukuru ile üst-üste gelir (Bkz. Şekil 1.b) ve bunların yerdeğiştirmeleri her yerde birbirlerini yok eder. Son olarak;  $\phi$ , faz sabiti (Bkz. Şekil 1.c) 0 ile  $\pi$  arasında olduğunda, bileşke dalga 0 ile  $2A_0$  arasında bir genliğe sahiptir.



Şekil 1. Farklı  $\phi$  (faz sabiti) değerlerine sahip dalga fonksiyonları.

### Vuru: Zaman İçinde Girişim:

Şimdiye kadar ilgilendiğimiz girişim olayı, zıt yönlerde yayılan iki veya daha fazla aynı frekanslı dalganın üst-üste binmesi ile ilgiliydi. Bu durumdaki bileşke dalga, değişime uğrayan ortamın koordinatlarına bağlıdır. Bu olay uzaysal girişim olarak düşünülebilir. Tellerde ve borulardaki duran dalgalar uzaysal girişimin belli başlı örnekleridir.

Şimdi aynı yönde yayılan biraz farklı frekanslara sahip iki dalganın üst-üste binmesi ile oluşan diğer bir girişim olayını inceleyelim. Bu durumda iki dalga verilen bir noktada görüldüğü zaman, periyodik olarak aynı fazda veya zıt fazdadırlar. Yani yapıcı ve söndürücü girişim arasında zamanla bir değişim vardır. Böylece bu olgu, zaman içinde girişim veya geçici girişim olarak adlandırılır. Örneğin iki diyapazon farklı frekanslarda uyarılırsa, vuru denilen dalgalanan şiddette bir ses işitilir. Vuru, verilen bir noktada biraz farklı frekanslara sahip olan iki dalganın üst-üste binmesiyle oluşan şiddetteki periyodik değişim olarak açıklanır. Saniyede işitilen vuru sayısı veya vuru frekansı, iki kaynak arasındaki frekans farkına eşittir. İnsan kulağının işitebileceği maksimum vuru frekansı 20 vuru/s civarındadır. Vuru frekansı bu değeri aştığı zaman vuruları üreten bileşik sesler ayırt edilemeyecek şekilde karışırlar. Bir ortamda aynı yönde yayılan fakat  $f_1$  ve  $f_2$  frekansları biraz farklı olan eş genlikli iki dalgayı göz önüne alalım. Her bir dalganın

bir noktada oluşturdıkları yer değiştirmeler;

$$y_1 = A_0 \cos(2\pi f_1 t) \quad (6)$$

$$y_2 = A_0 \cos(2\pi f_2 t) \quad (7)$$

denklemleri olarak yazılabilir. Üst-üste binme ilkesi kullanılarak o noktadaki bileşke yerdeğiştirme;

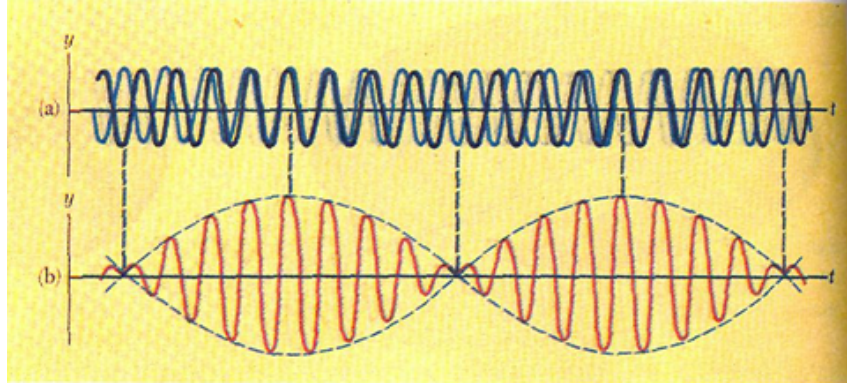
$$y = y_1 + y_2 = A_0[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)] \quad (8)$$

şeklinde bulunur. Bu ifade Denklem (9) ile verilen trigonometrik özdeşlik kullanılarak;

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (9)$$

$$y = 2A_0 \cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \quad (10)$$

Denklem (10) ile daha uygun bir şekilde yeniden yazılabilir. Bileşke dalga ile her bir dalgayı gösteren grafikler (Bkz. Şekil 2. a-b) görülmektedir.



**Şekil 2.** Vuru oluşumu gerçekleşen iki dalganın fonksiyonu.

Yukarıdaki eşitlikte görülen çarpanlara göre bir noktadaki bileşke titreşim;  $(f_1 + f_2)/2$  ortalama frekansa sahip olup genliği ise;

$$A = 2A_0 \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) \quad (11)$$

biçimindedir. Yani genlik  $(f_1 - f_2)/2$  ile verilen bir frekansla zamanla değişir.  $f_1$  frekansı  $f_2$  frekansına yakın ise bu genlik değişimi (Bkz. Şekil 2.b) gösterildiği gibi yavaş değişir. Vuru veya maksimum genliğin;

$$\cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right) = \pm 1 \quad (12)$$

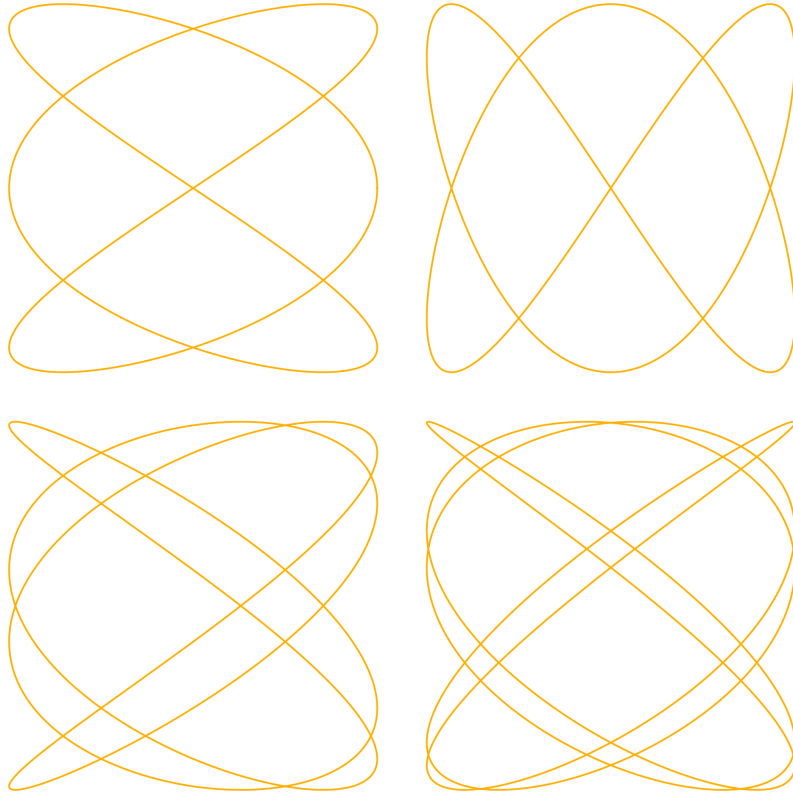
olduğu zaman elde edilebileceğine dikkat ediniz. Yani her bir devirde iki maksimum vardır. Genlik  $(f_1 + f_2)/2$  frekansı ile değiştiğinden dolayı, saniye başına vuru sayısı veya  $f_b$  vuru frekansı bu değer iki katına eşittir. Yani;

$$f_b = f_1 + f_2 \quad (13)$$

Örneğin iki diyapazon 438 Hz ve 442 Hz frekanslarında ayrı ayrı titreşirlerse oluşan bileşke ses dalgası 440 Hz'lik bir frekansa ve 4 Hz'lik bir vuru frekansına sahiptir. Yani dinleyici bir saniyede 4 defa maksimuma giden 440 Hz'lik frekansa sahip bir ses dalgası işitir.

## 2. Aşama için

Farklı frekans değerlerine sahip iki sinüsel işaret için, frekansların oranı bir rasyonel sayı (yani iki tam sayı oranı) ise oluşacak şekil kendi kendini tekrarlayan kapalı bir eğri olur (Örneğin frekanslar 5/13 oranında ise aynı zaman aralığında alçak frekansın 5 devri, yüksek frekansın 13 devrine eşit demektir). Böylece, bu süre sonunda her iki elektrik işareti tam sayıda devirden geçer ve aynı noktaya geri gelir. Frekanslar oranı, tam sayıların oranı olarak ifade edilemez ise (yani irrasyonel ise) oluşacak şekil kendi üzerine kapanmaz, fakat maksimum yatay ve düşey uzanımlarla meydana getirilen bir dikdörtgeni tamamen doldurur. Lissajous eğrilerinden birkaç basit örnek (*Bkz. Şekil 3.*) görülmektedir.



**Şekil 3.** Farklı Lissajous eğrileri.

Şekil 3'deki her bir durum için  $w_y/w_x$  frekans oranının, düşey doğrultudaki (ya yukarı veya aşağı) tüm maksimum sayısının yatay doğrultudaki (ya sol veya sağ) tüm maksimum oranına eşit olduğuna dikkat ediniz. Bu her rasyonel frekans oranı için doğru mudur? Lissajous eğrileri iki frekansı karşılaştırmak için uygun bir yoldur. Bu eğriler frekansı bilinen bir işaret ile frekansı bilinmeyen bir işaretin frekansını bulmak için kullanılır. En basit durum 1 : 1 oranıdır, fakat başka pek çok olasılık da mevcuttur.

## 4. Deneyin Yapılışı

### 1. Aşamayı Gerçekleştirmek için;

1. Cihazın güç kablosunu takın ve açma/kapama düğmesiyle osiloskopu açın.



### Farklı Frekanslar:

1. Cihazın güç kablosunu takın ve açma/kapama düğmesiyle osiloskopu açın.
2. Probun osiloskopa doğru şekilde bağlandığından emin olun.
3. Probun zayıflatma oranını (1x veya 10x) belirleyerek uygun ölçüm modunu seçin.
4. Sinyal üretici ile iki farklı sinyal üreterek üretilen dalgaları osiloskopun CH1 ve CH2 kanallarına bağlantılarını gerçekleştiriniz.
5. CH2'ye bağlı bulunan sinyal üreticinin frekansı değerlerini 25, 50, 75, 100, 250, 300, 400 ve 600 Hz değerlerinde ayarlayarak osiloskop üzerindeki sinyali durdurarak Lissajous eğrilerini elde ediniz.
6. Her eğri için  $w_y/w_x$  oranlarını şekillerden tespit ederek frekans üretici üzerinde ki frekans oranları ile karşılaştırınız.

## 5. Sorular

### 1.Aşama Soruları:

1. İki harmonik dalga aşağıdaki gibi veriliyor;

$$y_1 = 5 \sin [\pi(4x - 1200t)]$$
$$y_2 = 5 \sin [\pi(4x - 1200t - 0.25)]$$

Buradaki  $x$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ 'nin birimleri metre ve  $t$ 'nin birimi ise saniyedir. Bileşke dalganın genliğini ve frekansını hesaplayınız.  $y_1$ ,  $y_2$  dalgalarını ve hesapladığınız bileşke dalganın grafiğini milimetrik kağıda çizin.

### 2.Aşama Soruları:

1. Bir Lissajous eğrisindeki yatay ve dikey maksimum sayıların oranının frekanslar oranına eşitliğini doğrulayınız.
2. Frekansı bilinmeyen bir dalganın frekansını bu deneydeki metotla nasıl bulursunuz? Kısaca anlatınız.
3. 50 ve 100 Hz frekansları ile elde edilen Lissajous eğrisinin 50 ve 25 Hz' le elde edilene benzediğini fark edebilir misiniz? Benzerlerini ve farklılıklarını tartışınız.